INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 00210
2º semestre de 2016

Prof. Jürgen Stilck

9/1/2017

Resolução da 3ª Prova

Questão 1

Vemos que as variáveis relevantes na derivada a ser calculada são T e p, o que nos remete à representação de Gibbs. Inicialmente, notamos que:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left[T\frac{\partial s}{\partial T}\right] = T\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial T} = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

Podemos, agora, aplicar uma relação de Maxwell vinda da representação de Gibbs à última derivada:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial T} = -\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial p} = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\alpha v,$$

onde lembramos que o coeficiente de expansão térmica é dado por:

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p.$$

Vemos, portanto, que em geral podemos escrever:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\frac{\partial}{\partial T}(\alpha v).$$

No caso de termos, como nos gases ideais, $\alpha = 1/T$, vemos que:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{v}{T}\right) = -T\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - \frac{v}{T^2}\right] = -T\left[\frac{1}{T}\frac{v}{T} - \frac{v}{T^2}\right] = 0.$$

Questão 2

a) Temos que $du = Tds + Hdm$, logo, as equações de estado são:

$$T = \frac{\partial u}{\partial s} = T_0 \exp\left(\frac{s}{R} + \frac{m^2}{m_0^2}\right)$$

e

$$H = \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{2RT_0 m}{m_0^2}\exp\left(\frac{s}{R} + \frac{m^2}{m_0^2}\right).$$

b) Da primeira equação de estado vem:

$$\frac{T}{T_0} = \exp\left(\frac{s}{R} + \frac{m^2}{m_0^2}\right)$$

e substituindo esse resultado na segunda equação, obtemos:

$$H = \frac{2RmT}{m_0^2},$$

o que leva a:

$$m = \frac{H}{T}\frac{m_0^2}{2R},$$

que é a lei de Curie com a constante $C = \frac{m_0^2}{2R}$.

c) Da primeira equação de estado obtemos:

$$s = R\left[\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{m^2}{m_0^2}\right],$$

dai podemos calcular

$$c_M = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_m = R.$$

Questão 3

a) Temos que

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = \frac{\pi^2 RT}{2\Theta_F}.$$

$$c_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v = \frac{\pi^2 RT}{2\Theta_F}.$$

b) Compressibilidade isotérmica:

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T.$$

Subtituímos a temperatura de Fermi na energia livre, obtendo:

$$f = \frac{3RA}{5}v^{-2/3} - \frac{\pi^2 RT^2}{4A}v^{-1/3}.$$

Agora, calculamos:

$$p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = \frac{2RA}{5}v^{-5/3} + \frac{\pi^2 RT^2}{6A}v^{-1/3}.$$

Derivando novamente:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{2RA}{3}v^{-8/3} - \frac{\pi^2 RT^2}{18A}v^{-4/3}.$$

Logo:

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\frac{2RA}{3}v^{-5/3} + \frac{\pi^2 RT^2}{18A}v^{-1/3}}$$

c) Partimos da relação:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T} = \frac{\alpha}{\kappa_T}$$

Temos, da equação de estado para a pressão obtida acima, que:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{\pi^2 RT}{3A}v^{-1/3},$$

logo:

$$\alpha = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \kappa_T = \frac{6\pi^2 T}{12A^2 v^{-4/3} + \pi^2 T^2}.$$

d) Observamos que, quando $T \to 0$, teremos $c_v \to 0$ e $\alpha \to 0$, de maneira consistente com a lei de Nernst-Planck. Note que a entropia também se anula quando $T \to 0$, de acordo com o enunciado de Planck da terceira lei.